Stochastic Processes and their Applications 37 (1991) 61-69
North-Holland

Un schéma multipas d'approximation de l'équation de Langevin

Dominique Lépingle and Bernard Ribémont

Faculté des Sciences, Université d'Orléans, F-45067 Orléans, France

Received 30 March 1989
Revised 21 January 1990

In the approximation of solutions of some second-order stochastic differential equations, a multistep method converges faster than the Cauchy-Euler scheme for usual stochastic differential equations.

stochastic differential equations * numerical scheme * simulation

1. Introduction

Lorsqu'une sollicitation aléatoire de type houle, vent, séïsme agit sur une structure dont la réponse n'est pas linéaire, l'équation régissant cette structure prend la forme

$$\ddot{X}_t + q(X_t, \dot{X}_t) = r(X_t)\dot{B}_t,$$

où $\dot{B}$ est un bruit blanc. Très souvent, la fonction q se décompose en un terme de frottement proportionnel à la vitesse $\dot{X}$ et un terme dû au champ de forces ne dépendant que de la position X. C'est la cas par exemple du modèle proposé par Langevin pour étudier le déplacement d'une particule macroscopique soumise à des fluctuations irrégulières dues à de multiples chocs infinitésimaux [6]. Si d'autres particules de masse comparable sont présentes dans le milieu et s'y meuvent, un moyen raisonnable de rendre compte de leurs collisions avec la particule observée est d'utiliser un modèle poissonnien qui traduira les changements soudains de vitesse.

Notre objectif est de proposer pour ce modèle une approximation simple conduisant à une simulation numérique facile à réaliser. Depuis Maruyama [3], de nombreux travaux ont porté sur l'approximation des solutions d'équations différentielles stochastiques, soit trajectoire par trajectoire [10], soit surtout en moyenne quadratique [4, 5, 9], y compris en présence de discontinuités [2, 8]. On sait obtenir des ordres de convergence arbitraires, la plupart du temps au prix de la simulation d'intégrales stochastiques multiples. Un bon panorama de ces questions est donné dans [7] ou dans le dernier chapitre de [1]. Pour notre problème, nous allons montrer qu'un schéma à deux pas permet une convergence plus rapide que le schéma d'Euler-Maruyama pour les équations non dégénérées habituelles.

2. Description du modèle

Soit $(\Omega, (\mathscr{F}_t), P)$ une espace probabilisé filtré dont la filtration vérifie les hypothèses habituelles de continuité à droite et d'augmentation. Sur cet espace on se donne un mouvement brownien W de dimension n et une mesure de Poisson stationnaire p sur $\mathbb{R}_+ \times U$, où $(U, \mathscr{B}_U, F)$ est un espace mesurable muni d'une mesure σ-finie F, qui est la mesure caractéristique de p. La mesure p est indépendante de W, et on appelle q la mesure-martingale

$$q(\omega; \mathrm{d}s, \mathrm{d}u) = p(\omega; \mathrm{d}s, \mathrm{d}u) - \mathrm{d}s \otimes F(\mathrm{d}u).$$

On note $|x|$ la norme euclidienne d'un élément x de $\mathbb{R}^d$. Soient T un réel >0, b et $(\sigma_i\,; i = 1, \dots, n)$ des fonctions boréliennes de $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, c une fonction mesurable de $[0, T] \times \mathbb{R}^d \times U$ dans $\mathbb{R}^d$ qui vérifient les conditions suivantes: il existe $K > 0$ tel que pour tout choix de s et t dans $[0, T]$, de x et y dans $\mathbb{R}^d$, on ait

$$\begin{aligned}
&|b(t,x) - b(s,x)|^2 + \sum_{i=1}^n |\sigma_i(t,x) - \sigma_i(s,x)|^2 \\
&\quad + \int_U |c(t,x,u) - c(s,x,u)|^2 F(\mathrm{d}u) \leq K(s-t)^2(1+|x|^2), \\
&|b(t,x) - b(t,y)|^2 + \sum_{i=1}^n |\sigma_i(t,x) - \sigma_i(t,y)|^2 \\
&\quad + \int_U |c(t,x,u) - c(t,y,u)|^2 F(\mathrm{d}u) \leq K|x-y|^2.
\end{aligned} \tag{1}$$

On en déduit aisément qu'il existe $L > 0$ tel que pour tout t dans $[0, T]$ et tout x dans $\mathbb{R}^d$, on ait

$$|b(t,x)|^2 + \sum_{i=1}^n |\sigma_i(t,x)|^2 + \int_U |c(t,x,u)|^2 F(\mathrm{d}u) \leq L(1+|x|^2). \tag{2}$$

Pour chaque couple (ξ, η) d'éléments de $L^2(\Omega, \mathscr{F}_0, P; \mathbb{R}^d)$, il existe alors un unique couple de processus (X, V) sur $[0, T]$ tels que

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}X_t = V_t\,\mathrm{d}t, \\
&\mathrm{d}V_t = b(t, X_t)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^n \sigma_i(t, X_t)\,\mathrm{d}W_t^i + \int_U c(t, X_{t-}, u) q(\mathrm{d}t, \mathrm{d}u)
\end{aligned} \tag{3}$$

de conditions initiales $X_0 = \xi$, $V_0 = \eta$, et le processus X vérifie

$$E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2\right] = M < \infty.$$

3. Approximation en l'absence de frottement

Partageons l'intervalle $[0, T]$ avec la subdivision

$$\tau\colon\ (t_0 = 0,\ t_1 = h, \dots,\ t_\rho = \rho h, \dots,\ t_N = T),$$

où $T = Nh$, et posons

$$\tau_t = t_\rho \quad \text{si } t_\rho < t \leq t_{\rho+1}, \quad \rho = 0, \ldots, N-1.$$

La méthode d'Euler-Maruyama appliquée au système différentiel stochastique (3) conduit à poser

$$\begin{aligned} {}^\tau X_t &= \xi + \int_0^t {}^\tau V_{\tau_s} \, \mathrm{d}s, \\ {}^\tau V_t &= \eta + \int_0^t \Big[b(\tau_s, {}^\tau X_{\tau_s}) \, \mathrm{d}s + \sum_{i=1}^n \sigma_i(\tau_s, {}^\tau X_{\tau_s}) \, \mathrm{d}W_s^i \\ &\qquad + \int_U c(\tau_s, {}^\tau X_{\tau_s}, u) q(\mathrm{d}s, \mathrm{d}u) \Big]. \end{aligned} \tag{4}$$

On peut alors montrer qu'il existe une constante C telle que

$$E\Big[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - {}^\tau X_t|^2 \Big] \leq Ch^2$$

et

$$E\Big[\sup_{0 \leq t \leq T} |V_t - {}^\tau V_t|^2 \Big] \leq Ch^2,$$

ce qui assure une rapidité de convergence supérieure au cas habituel, où la majoration n'est qu'en Ch. La démonstration ressemble beaucoup à celle du Théorème 1 ci-dessous, nous ne l'écrirons donc pas; nous allons en effet utiliser une autre approximation, également naturelle, qui aura le même ordre de convergence et dont nous verrons qu'elle peut être meilleure à l'occasion. Posons donc pour tout t dans $[0, T]$,

$$\begin{aligned} X_t^\tau = \xi + \eta t + \int_0^t \Big[\int_0^s \Big[b(\tau_r, X_{\tau_r}^\tau) \, \mathrm{d}r + \sum_{i=1}^n \sigma_i(\tau_r, X_{\tau_r}^\tau) \, \mathrm{d}W_r^i \\ + \int_U c(\tau_r, X_{\tau_r}^\tau, u) q(\mathrm{d}r, \mathrm{d}u) \Big] \Big] \, \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{5}$$

Théorème 1. *Sous les conditions* (1), *soit* (X, V) *la solution de* (3). *Il existe alors une constante* C *ne dépendant que de* K, T, $\lambda = E|\xi|^2$, $\mu = E|\eta|^2$ *telle que*

$$E\Big[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - X_t^\tau|^2 \Big] \leq Ch^2.$$

Preuve. Le processus X est solution de

$$\begin{aligned} X_t = \xi + \eta t + \int_0^t \Big[\int_0^s \Big[b(r, X_r) \, \mathrm{d}r + \sum_{i=1}^n \sigma_i(r, X_r) \, \mathrm{d}W_r^i \\ + \int_U c(r, X_{r-}, u) q(\mathrm{d}r, \mathrm{d}u) \Big] \Big] \, \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{6}$$

Pour $0 \leqslant v < t \leqslant T$, une intégration par parties montre que

$$X_t - X_v = \eta(t-v) + \int_0^t (t - r \vee v)\left[b(r, X_r)\,\mathrm{d}r + \sum_{i=1}^n \sigma_i(r, X_r)\,\mathrm{d}W_r^i \right] + \int_0^t \int_U (t - r \vee v) c(r, X_{r-}, u) q(\mathrm{d}r, \mathrm{d}u),$$

où l'on a posé $r \vee v = \max(r, v)$, et on en déduit que

$$E[|X_t - X_v|^2] \leqslant 3\mu(t-v)^2 + 3E\left[t \int_0^t (t - r \vee v)^2 |b(r, X_r)|^2\,\mathrm{d}r \right] + 3E\left[\int_0^t (t - r \vee v)^2 \left(\sum_{i=1}^n |\sigma_i(r, X_r)|^2 + \int_U |c(r, X_r, u)|^2 F(\mathrm{d}u) \right) \mathrm{d}r \right].$$

En utilisant (2), on obtient

$$E[|X_t - X_v|^2] \leqslant A(t-v)^2,$$

avec $A = 3[\mu + TL(T+1)(1+M)]$. Soit $\hat{X}_t$ le terme obtenu en remplaçant $X^\tau_{\tau_r}$ par X_{τ_r} dans le membre de droite de (5). On écrit

$$X_t - X_t^\tau = (X_t - \hat{X}_t) + (\hat{X}_t - X_t^\tau);$$

la condition de Lipschitz en x permet d'obtenir

$$\begin{aligned} &E\left[\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |\hat{X}_s - X_s^\tau|^2 \right] \\ &\leqslant 2E\left[t \int_0^t \left| \int_0^v (b(\tau_r, X_{\tau_r}) - b(\tau_r, X^\tau_{\tau_r}))\,\mathrm{d}r \right|^2 \mathrm{d}v \right] \\ &\quad + 2E\left[t \int_0^t \left| \int_0^v \sum_{i=1}^n (\sigma_i(\tau_r, X_{\tau_r}) - \sigma_i(\tau_r, X^\tau_{\tau_r}))\,\mathrm{d}W_r^i + \int_0^v \int_U (c(\tau_r, X_{\tau_r}, u) - c(\tau_r, X^\tau_{\tau_r}, u)) q(\mathrm{d}r, \mathrm{d}u) \right|^2 \mathrm{d}v \right] \\ &\leqslant 2KT^2(T+1) \int_0^t E\left[\sup_{0 \leqslant r \leqslant v} |X_r - X_r^\tau|^2 \right] \mathrm{d}v. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} &E\left[\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |X_s - \hat{X}_s|^2 \right] \\ &= E\left[\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \left| \int_0^s \left[\int_0^v \left[(b(r, X_r) - b(\tau_r, X_{\tau_r}))\,\mathrm{d}r \right.\right.\right.\right. \end{aligned}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(\sigma_i(r,X_r)-\sigma_i(\tau_r,X_{\tau_r}))\,\mathrm{d}W_r^i$$

$$\left.\left.\left.+\int_U(c(r,X_{r-},u)-c(\tau_r,X_{\tau_r},u))q(\mathrm{d}r,\mathrm{d}u)\right]\right]\mathrm{d}v\right|^2\Bigg]$$

$$\leq 4T\int_0^T vE\left[\int_0^v|b(r,X_r)-b(\tau_r,X_r)|^2\,\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}v$$

$$+4T\int_0^T vE\left[\int_0^v|b(\tau_r,X_r)-b(\tau_r,X_{\tau_r})|^2\,\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}v$$

$$+4T\int_0^T E\left[\int_0^v\left(\sum_{i=1}^{n}|\sigma_i(r,X_r)-\sigma_i(\tau_r,X_r)|^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_U|c(r,X_r,u)-c(\tau_r,X_r,u)|^2F(\mathrm{d}u)\right)\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}v$$

$$+4T\int_0^T E\left[\int_0^v\left(\sum_{i=1}^{n}|\sigma_i(\tau_r,X_r)-\sigma_i(\tau_r,X_{\tau_r})|^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_U|c(\tau_r,X_r,u)-c(\tau_r,X_{\tau_r},u)|^2F(\mathrm{d}u)\right)\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}v$$

$$\leq\tfrac{2}{3}KT^3[(1+M)(TL+2)+A(T+2)]h^2.$$

Il reste à utiliser le lemme de Gronwall pour obtenir la majoration désirée. □

Pour approcher la vitesse, on pose

$$V_t^\tau=\eta+\int_0^t\left[b(\tau_s,X_{\tau_s}^\tau)\,\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(\tau_s,X_{\tau_s}^\tau)\,\mathrm{d}W_s^i\right.$$

$$\left.+\int_U c(\tau_s,X_{\tau_s}^\tau,u)q(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)\right].$$

Grâce au théorème précédent et à l'inégalité de Doob, on vérifie facilement qu'il existe une constante C telle que

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|V_t-V_t^\tau|^2\right]\leq Ch^2.$$

On peut remarquer d'après leur écriture même que ces approximations X^τ et V^τ de X et V sont exactes lorsque les coefficients b, σ_i et c sont constants. C'est aussi le cas de ${}^\tau V$, mais non de ${}^\tau X$ puisqu'un calcul simple montre que si $n=d=1$, $b=0$, $\sigma=1$, $c=0$, alors

$$E[|X_T-{}^\tau X_T|^2]=\tfrac{1}{3}(h^2T).$$

Même dans le cas déterministe, où $\sigma=c=0$, et par exemple $b(t,x)=at$, alors

$$X_T-X_T^\tau=\tfrac{1}{12}ahT(3T-h),$$

tandis que

$$X_T-{}^\tau X_T=\tfrac{1}{6}ahT(3T-2h).$$

4. Schéma numérique

Précisons maintenant le schéma associé à l'approximation obtenue. Nous supposons ici $F(U)<\infty$. Dans ce cas,

$$N_t=\int_0^t\int_U p(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)$$

est un processus de Poisson d'intensité $F(U)$, et les discontinuités de la vitesse V n'ont lieu qu'aux instants de saut de N. Nous allons approcher X aux instants ρh par des valeurs $\bar{X}_\rho$ calculées inductivement, qui sont en fait égales aux valeurs $X^\tau_{\rho h}$ précédentes, comme un peu de calcul permet de le montrer. Pour alléger l'écriture, nous poserons

$$b_\rho=b(\rho h,\bar{X}_\rho),\qquad \sigma_{i,\rho}=\sigma_i(\rho h,\bar{X}_\rho),\qquad c_\rho(u)=c(\rho h,\bar{X}_\rho,u).$$

Corollaire 1. *On suppose $F(U)<\infty$ et on pose*

$$\begin{aligned}
\bar{X}_0&=\xi,\\
\bar{X}_1&=\bar{X}_0+\eta h+\left(b_0-\int_U c_0(u)F(\mathrm{d}u)\right)\frac{h^2}{2}\\
&\quad+\sum_{i=1}^n\sigma_{i,0}\int_0^h(h-s)\,\mathrm{d}W^i_s+\int_0^h(h-s)\int_U c_0(u)p(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u),\\
\bar{X}_{\rho+1}&=2\bar{X}_\rho-\bar{X}_{\rho-1}+\left(b_{\rho-1}+b_\rho-\int_U(c_{\rho-1}(u)+c_\rho(u))F(\mathrm{d}u)\right)\frac{h^2}{2}\\
&\quad+\sum_{i=1}^n\sigma_{i,\rho-1}\int_{\rho h-h}^{\rho h}(s+h-\rho h)\,\mathrm{d}W^i_s\\
&\quad+\sum_{i=1}^n\sigma_{i,\rho}\int_{\rho h}^{\rho h+h}(\rho h+h-s)\,\mathrm{d}W^i_s\\
&\quad+\int_{\rho h-h}^{\rho h}(s+h-\rho h)\int_U c_{\rho-1}(u)p(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)\\
&\quad+\int_{\rho h}^{\rho h+h}(\rho h+h-s)\int_U c_\rho(u)p(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u).
\end{aligned}\tag{7}$$

Il existe alors une constante C telle que

$$E\left[\sup_{0\le\rho\le N}|X_{\rho h}-\bar{X}_\rho|^2\right]\le Ch^2.$$

Preuve. Par intégration par parties, on vérifie immédiatement que

$$\begin{aligned}
X^\tau_t&=\xi+\eta t+\int_0^t(t-r)\left[b(\tau_r,X^\tau_{\tau_r})\,\mathrm{d}r+\sum_{i=1}^n\sigma_i(\tau_r,X^\tau_{\tau_r})\,\mathrm{d}W^i_r\right]\\
&\quad+\int_0^t\int_U(t-r)c(\tau_r,X^\tau_{\tau_r},u)q(\mathrm{d}r,\mathrm{d}u).
\end{aligned}$$

Comme

$$E\left[\int_U |c(\tau_r, X^\tau_{\tau_r}, u)|F(\mathrm{d}u)\right] \le \left(E\left[\int_U |c(\tau_r, X^\tau_{\tau_r}, u)|^2 F(\mathrm{d}u)\right]\right)^{1/2} (F(U))^{1/2}$$

$$\le \left(L\left(1+E\left[\sup_{0\le t\le T} |X^\tau_t|^2\right]\right)\right)^{1/2} (F(U))^{1/2},$$

on peut remplacer l'intégrale stochastique poissonnienne par

$$\int_0^t \int_U (t-r)c(\tau_r, X^\tau_{\tau_r}, u)p(\mathrm{d}r, \mathrm{d}u) - \int_0^t (t-r)\left(\int_U c(\tau_r, X^\tau_{\tau_r}, u)F(\mathrm{d}u)\right) \mathrm{d}r.$$

On vérifie alors immédiatement que $X^\tau_h = \bar{X}_1$. Dans le calcul de $X^\tau_{\rho h+h} - 2X^\tau_{\rho h} + X^\tau_{\rho h-h}$, on constate que pour chaque type d'intégrale,

$$\int_0^{\rho h+h} (\rho h + h - r) - 2\int_0^{\rho h} (\rho h - r) + \int_0^{\rho h - h} (\rho h - h - r)$$

$$= \int_{\rho h - h}^{\rho h} (r + h - \rho h) + \int_{\rho h}^{\rho h + h} (\rho h + h - r),$$

ce qui permet de vérifier par récurrence que $X^\tau_{\rho h+h} = \bar{X}_{\rho+1}$. □

Il s'agit clairement d'un schéma multipas. Les variables

$$\int_{\rho h-h}^{\rho h} (\rho h - s)\, \mathrm{d}W^i_s \quad \text{et} \quad \int_{\rho h - h}^{\rho h} (s + h - \rho h)\, \mathrm{d}W^i_s$$

sont gaussiennes centrées de variance $\frac{1}{3}h^3$, de covariance $\frac{1}{6}h^3$; on peut facilement les simuler pour $\rho = 1, \ldots, N$ et $i = 1, \ldots, d$ à partir d'une suite de variables gaussiennes centrées indépendantes. Pour évaluer les termes poissonniens, on simule les instants de saut grâce à un processus de Poisson d'intensité $F(U)$, et à ces instants les valeurs dans U du processus ponctuel lié à p suivent la loi $F/F(U)$; ces simulations peuvent être faites une fois pour toutes, car elles ne dépendent pas du pas h de discrétisation.

De son côté, l'approximation ${}^\tau X$ fournit le schéma

$$\tilde{X}_0 = \xi,$$

$$\tilde{X}_1 = \tilde{X}_0 + \eta h,$$

$$\tilde{X}_{\rho+1} = 2\tilde{X}_\rho - \tilde{X}_{\rho-1} + h^2\left(b_{\rho-1} - \int_U c_{\rho-1}(u)F(\mathrm{d}u)\right)$$

$$+ h\sum_{i=1}^n \sigma_{i,\rho-1}(W^i_{\rho h} - W^i_{\rho h - h}) + h\int_U c_{\rho-1}(u)p(]\rho h - h, \rho h], \mathrm{d}u).$$

Apparemment, ce schéma est plus simple que celui de $\bar{X}$. En réalité, il nécessite le même type de simulations et de calculs. Et il présente l'inconvénient d'utiliser pour le calcul de $\tilde{X}_{\rho+1}$ les valeurs des fonctions à l'instant trop éloigné $\rho h - h$ ainsi que les accroissements browniens ou poissonniens sur le seul intervalle $]\rho h - h, \rho h]$; cela nuit à sa précision, comme on l'a constaté plus haut dans des cas particuliers.

5. Approximation en présence de frottement

Il reste à introduire une force de frottement, d'amplitude proportionnelle à la vitesse de la particule.

Théorème 2. *Outre les hypothèses du théorème* 1, *on suppose donnée sur* $[0, T]$ *une fonction* α *dérivable telle que*

$$|\dot{\alpha}(t)-\dot{\alpha}(s)| \leq K(t-s) \quad \textit{pour } 0 \leq s < t \leq T.$$

Soit (Y, R) *la solution du système*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Y_t &= R_t\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}R_t &= -\alpha(t)R_t\,\mathrm{d}t + b(t, Y_t)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(t, Y_t)\,\mathrm{d}W_t^i \\ &\quad + \int_U c(t, Y_{t-}, u)q(\mathrm{d}t, \mathrm{d}u) \end{aligned} \tag{8}$$

de conditions initiales $Y_0 = \xi$, $R_0 = \eta$. *Si l'on pose*

$$\beta(t) = \exp\left\{\int_0^t \frac{\alpha(s)}{2}\,\mathrm{d}s\right\},$$

$$\begin{aligned} Y_t^\tau = \beta^{-1}(t)\Bigg[\xi + \left(\frac{\alpha(0)}{2}\xi + \eta\right)t \\ + \int_0^t \Bigg[\int_0^s \beta(\tau_r)\Bigg[(\tfrac{1}{4}(2\dot{\alpha}(\tau_r)+\alpha^2(\tau_r))Y_{\tau_r}^\tau + b(\tau_r, Y_{\tau_r}^\tau))\,\mathrm{d}r \\ + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(\tau_r, Y_{\tau_r}^\tau)\,\mathrm{d}W_r^i + \int_U c(\tau_r, Y_{\tau_r}^\tau, u)q(\mathrm{d}r, \mathrm{d}u)\Bigg]\Bigg]\,\mathrm{d}s\Bigg], \end{aligned}$$

il existe alors une constante C *telle que*

$$E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t - Y_t^\tau|^2\right] \leq Ch^2.$$

Preuve. On pose

$$X_t = \beta(t)Y_t,$$
$$V_t = \tfrac{1}{2}\alpha(t)\beta(t)Y_t + \beta(t)R_t.$$

On vérifie d'abord que $\mathrm{d}X_t = V_t\,\mathrm{d}t$. On calcule ensuite

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V_t &= \tfrac{1}{4}(2\dot{\alpha}(t)+\alpha^2(t))\beta(t)Y_t\,\mathrm{d}t + \alpha(t)\beta(t)R_t\,\mathrm{d}t + \beta(t)\,\mathrm{d}R_t \\ &= \tfrac{1}{4}(2\dot{\alpha}(t)+\alpha^2(t))X_t\,\mathrm{d}t + \beta(t)(b(t, Y_t)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{n} \sigma_i(t, Y_t)\,\mathrm{d}W_t^i) \\ &\quad + \int_U \beta(t)c(t, Y_{t-}, u)q(\mathrm{d}t, \mathrm{d}u). \end{aligned}$$

Comme $Y_t = \beta^{-1}(t)X_t$, le couple (X, V) est solution d'une équation du type (3), où b, σ_i, c sont remplacés par

$$\check{b}(t, x) = \tfrac{1}{4}(2\dot{\alpha}(t) + \alpha^2(t))x + \beta(t)b(t, \beta^{-1}(t)x),$$

$$\check{\sigma}_i(t, x) = \beta(t)\sigma_i(t, \beta^{-1}(t)x),$$

$$\check{c}(t, x, u) = \beta(t)c(t, \beta^{-1}(t)x, u).$$

Les conditions (1) étant encore vérifiées, on peut approcher X par un processus X^τ comme dans le théorème 1, et il reste à s'assurer que l'approximation X_t^τ est précisément égale à $\beta(t)Y_t^\tau$. Le caractère borné de $\beta^{-1}(t)$ sur $[0, T]$ permet de conclure. □

Le schéma numérique associé est encore à pas double, il repose sur le calcul des valeurs successives de

$$\beta(\rho h + h)\bar{Y}_{\rho+1} - 2\beta(\rho h)\bar{Y}_\rho + \beta(\rho h - h)\bar{Y}_{\rho-1},$$

où bien sûr $\bar{Y}_\rho$ vaut $Y_{\rho h}^\tau$. On obtient ces valeurs en remplaçant dans les formules (7) les expressions $b_\rho, \sigma_{i,\rho}, c_\rho(u)$ par les valeurs des fonctions $\check{b}, \check{\sigma}_i, \check{c}$ calculées en $(\rho h, \beta(\rho h)\bar{Y}_\rho)$ ou $(\rho h, \beta(\rho h)\bar{Y}_\rho, u)$.

Références

[1] T.C. Gard, Introduction to Stochastic Differential Equations (Dekker, New York, 1987).

[2] I.I. Gihman and A.V. Skorohod, The Theory of Stochastic Processes, Vol. 3 (Springer, New York, 1979).

[3] G. Maruyama, Continuous Markov processes and stochastic equations, Rend. Circ. Mat. Palermo 4 (1955) 48-90.

[4] E.J. McShane, Stochastic Calculus and Stochastic Models (Academic Press, New York, 1974).

[5] G.N. Milstein, Approximate integration of stochastic differential equations, Theory Probab. Appl. 19 (1974) 557-562.

[6] E. Nelson, Dynamical Theories of Brownian Motion (Princeton Univ. Press, Princeton, NY, 1967).

[7] E. Pardoux and D. Talay, Discretization and simulation of stochastic differential equations, Acta Appl. Math. 3 (1985) 23-47.

[8] E. Platen, An approximation method for a class of Itô processes with jump component, Liet. Mat. Rink. 22 (1982) 124-136.

[9] W. Rümelin, Numerical treatment of stochastic differential equations, SIAM J. Num. Anal. 19 (1982) 604-613.

[10] D. Talay, Résolution trajectorielle et analyse numérique des équations différentielles stochastiques, Stochastics 9 (1983) 275-306.